RED BUILDING TEAM

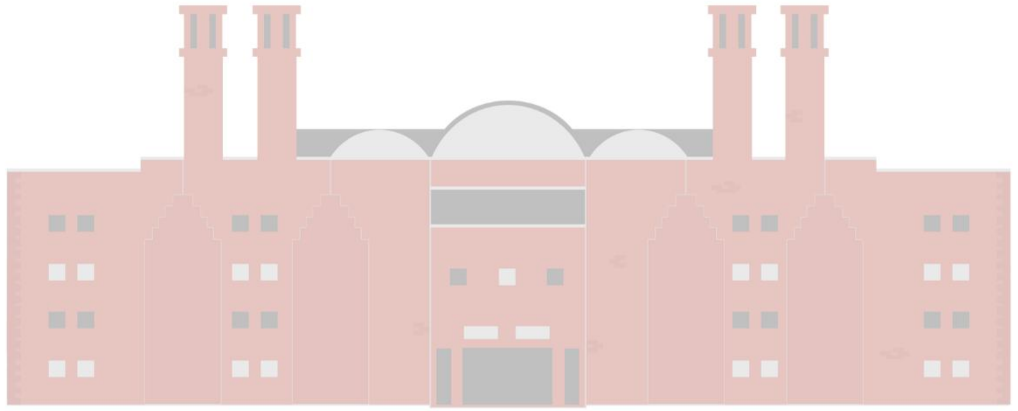
قسم هندسة الحواسيب والأتمتة

السنة الثانية / الفصل الأول

التَحليلْ الرياضِيْ ٣

المحاضرة التاسع عشر

6 صفحات



الدكتور: معاذ عبد المجيد

التاريخ: 2014/11/12

السرعة، الدقّة والتميُّز

/RedBuildingTeam

لا تنسونا من دعائكم فنحنُ نحتاجه من قلوبكم ♥

تطبيقات نظرية الرواسب

• تطبيق 3

حساب التكاملات من الشكل :

$$\bullet\ I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos mx\,dx$$

$$\bullet\ I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin mx\,dx$$

حيث m عدد حقيقي أكبر من الصفر و $f(z)$ كسر جبري عادي في x , درجة بسطه أصغر من درجة مقامه بدرجة واحدة على الأقل , وتحليلي في النصف العلوي للمستوي باستثناء عدد محدد من الأقطاب الغير الواقعة على المحور الحقيقي $a_1, \ldots\ldots, a_k$ عندئذ :

$$I_1 = Re\left[2\pi i \sum_{k=1}^{N} res\left(f(z)\,e^{imz}, a_k\right)\right]$$

$$I_2 = Im\left[2\pi i \sum_{k=1}^{N} res\left(f(z)\,e^{imz}, a_k\right)\right]$$

واذا كان بالإضافة للأقطاب السابقة عدد من الأقطاب البسيطة الواقعة على المحور الحقيقي $b_1, \ldots \ldots, b_m$ فإن :

$$I_1 = Re\left[2\pi i \sum_{k=1}^{N} res\left(f(z)\,e^{imz}, a_k\right) + \pi i \sum_{k=1}^{m} res\left(f(z)\,e^{imz}, b_k\right)\right]$$

$$I_2 = Im\left[2\pi i \sum_{k=1}^{N} res\left(f(z)\,e^{imz}, a_k\right) + \pi i \sum_{k=1}^{m} res\left(f(z)\,e^{imz}, b_k\right)\right]$$

مثال : أحسب التكاملين

$$\boldsymbol{I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 3x}{x(x^2+1)}dx \quad , \quad I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin 3x}{x(x^2+1)}dx}$$

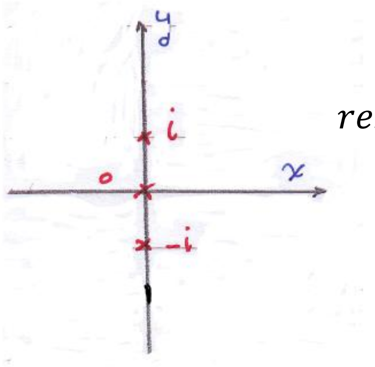
الحل:

لا تنسوا زيارتنا على مواقع التواصل الإجتماعي

$$m = 3 > 0$$

$$f(z) = \frac{1}{z(z^2+1)}$$

درجة البسط أقل من درجة المقام



أقطاب بسيطة $z = 0\,, z = \pm i$

$$res\left(\frac{e^{3iz}}{z(z^2+1)}, 0\right) = \frac{g}{h'} : g = \frac{e^{3iz}}{z}$$

$$res\left(\frac{e^{3iz}}{z(z^2+1)}, 0\right) = 1$$

$$res\left(\frac{e^{3iz}}{z(z^2+1)}, +i\right) = \frac{g}{h'} :$$

$$g = \frac{e^{3iz}}{z(z+i)}$$

$$res\left(\frac{e^{3iz}}{z(z^2+1)}, +i\right) = \frac{\frac{e^{-3}}{2i^2}}{1} = -\frac{1}{2e^3}$$

$$I_1 = Re\left[2\pi i\left(-\frac{1}{2e^3}\right) + \pi i(1)\right] = 0$$

$$I_2 = Im\left[2\pi i\left(-\frac{1}{2e^3}\right) + \pi i(1)\right] = \pi\left(1 - \frac{1}{e^3}\right)$$

مثال 2:

$$\boldsymbol{I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2+1)^2}\,dx}$$

$$f(z) = \frac{1}{(z^2+1)^2}$$

قطبان من المرتبة 2 $\quad z^2 + 1 = 0 \Rightarrow z = \pm i$

$$res\left(\frac{e^{iz}}{(z^2+1)^2}\ ,i\right)=\frac{g}{h'}:$$

$$g=\frac{e^{iz}}{(z+i)^2}$$

$$\grave{g}=\frac{i\,e^{iz}(z+i)^2-2(z+i)e^{iz}}{(z+i)^4}\Rightarrow g'(i)=\frac{1}{2ei}$$

$$res\left(\frac{e^{iz}}{(z^2+1)^2}\ ,i\right)=\frac{1}{2ei}$$

$$\Rightarrow I=Re\left(\ 2\pi i\ \ \frac{1}{2ei}\right)=\frac{\pi}{e}$$

مثال 3:

$$\boldsymbol{I}=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin \boldsymbol{x}}{(\boldsymbol{x}^2+\mathbf{1})^2}\boldsymbol{dx}=I_m\left(\frac{\pi}{e}\right)=0$$

- **تطبيق 4**

حساب التكاملات من الشكل :

$$I=\int_{0}^{\infty}x^{p-1}f(x)\,dx:p\epsilon Q\backslash Z$$

حيث $f(z)$ كسر جبري عادي تحليلي في المستوي باستثناء عدد محدد من الأقطاب غير الواقعة على الجزء الموجب من المحور الحقيقي و :

$$\lim_{Z\to\infty}[z^P f(z)]=0$$

$$\lim_{z\to 0}[z^p\ f(z)]=0$$

عندئذ:

$$I = -\frac{\pi\, e^{-ip\pi}}{sin(p\pi)} \sum_{K=1}^{N} res(z^{p-1}\, f(z), a_k)$$

مثال 4: أحسب التكامل

$$\boldsymbol{I = \int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{x^2+1} dx \quad : \quad p \neq 1 \;\; , \;\; 0 < p < 2}$$

الحل:

$$f = \frac{1}{z^2+1}$$

تحليلي باستثناء أقطاب بسيطة : $z = \pm i$

$$\lim_{z\to 0}\left[\frac{z^p}{z^2+1}\right] = 0$$

$\lim_{z\to\infty}\left[\frac{z^p}{z^2+1}\right] = 0$(درجة البسط أقل من درجة المقام)

$$res\left(\frac{z^{p-1}}{z^2+1}, i\right) = \frac{g}{h'} = \frac{i^{p-1}}{2i}$$

$$res\left(\frac{z^{p-1}}{z^2+1}, -i\right) = \frac{g}{h'} = \frac{(-i)^{p-1}}{-2i}$$

$$I = -\frac{\pi e^{-p\pi i}}{\sin \pi p}\left[\frac{i^{p-1}}{2i} - \frac{(-i)^{p-1}}{2i}\right]$$

$$i = e^{\frac{\pi}{2}i} = e^{-\frac{3\pi}{2}i} \quad , \quad -i = e^{-\frac{\pi}{2}i} = e^{\frac{3\pi}{2}i}$$

$$I = -\frac{1}{2i}\frac{\pi e^{-p\pi i}}{\sin \pi p}\left[e^{(p-1)\frac{\pi}{2}i} - e^{-(p-1)\frac{\pi}{2}i}\right]$$

$$I = -\frac{1}{2i}\frac{\pi}{\sin \pi p}\left[e^{\frac{\pi}{2}ip-\frac{\pi}{2}i-p\pi i} - e^{-\frac{\pi}{2}ip+\frac{\pi}{2}i+p\pi i}\right]$$

$$I = -\frac{1}{2i}\frac{\pi}{\sin \pi p}\left[e^{-\frac{\pi}{2}ip}(-i) - e^{\frac{\pi}{2}ip}(i)\right]$$

$$I = \frac{1}{2}\frac{\pi}{\sin \pi p}\left[e^{\frac{\pi}{2}pi} + e^{-\frac{\pi}{2}pi}\right]$$

$$I = \frac{\pi}{\sin \pi p}\cos\left(\frac{\pi}{2}p\right)$$

$$I = \frac{\pi}{2\sin\left(\frac{\pi}{2}p\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}p\right)}\cos\left(\frac{\pi}{2}p\right) = \frac{\pi}{2\sin\left(\frac{\pi}{2}p\right)}$$

مثال 5:

$$\boldsymbol{I = \int_0^\infty [\frac{x^{-\frac{1}{4}}}{(x+1)} + \frac{\sin x}{x}]dx}$$

الحل:

$$I = \int_0^\infty [\frac{x^{-\frac{1}{4}}}{x+1} + \frac{\sin x}{x}]dx$$

نفرق التكامل

$$I_1 = \int_0^\infty \frac{x^{-\frac{1}{4}}}{x+1}dx \quad , \quad I_2 = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx$$

$$I_1 = \int_0^\infty \frac{x^{-\frac{1}{4}}}{x+1}dx$$

$$f(z) = \frac{1}{z+1} \Rightarrow z = -1 \text{ قطب بسيط}$$

$$P - 1 = -\frac{1}{4} \Rightarrow p = \frac{3}{4}$$

$$\lim_{z\to 0}\frac{z^{\frac{3}{4}}}{z+1} = 0$$

$$\lim_{z\to \infty}\frac{z^{\frac{3}{4}}}{z+1} = 0$$

لا تنسوا زيارتنا على مواقع التواصل الإجتماعي

$$res\left(\frac{z^{-\frac{1}{4}}}{z+1},-1\right)=(-1)^{-\frac{1}{4}}=e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

$$I_1=\frac{-\pi\ e^{-i\frac{3}{4}\pi}}{\sin\frac{3\pi}{4}}e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

$$e^{-i\frac{\pi}{4}}\ e^{-i\frac{3}{4}\pi}=e^{-\pi i}=-1$$

$$I_1=\frac{\pi}{\frac{1}{\sqrt{2}}}=\sqrt{2}\pi$$

$$I_2=\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx$$

$$f(z)=\frac{1}{z}:m=1>0$$

f تحليلي في المستوي العقدي باستثناء $z=0$ قطب بسيط

$$res\left(\frac{e^{iz}}{z},0\right)=1$$

$$I_2=\frac{1}{2}I_m[\pi i(1)]=\frac{\pi}{2}$$

$$I=I_1+I_2=\pi(\frac{1}{2}+\sqrt{2})$$

علينا أن نتعلم العيش معاً كإخوة، أو الفناء معاً كأغبياء

مارتن لوثر كينغ